

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen



Die **Leistungs- und Energie-Analysatoren Qualistar+** dienen zur sofortigen Darstellung aller wesentlichen Eigenschaften eines Drehstromnetzes.

Die Geräte der Qualistar+ Serie zeigen alle an den Eingängen anliegenden Signale gleichzeitig an. Die Messungen können als Zahlenwerte, als Wellenformen, in spektraler Darstellung oder als Vektordiagramm angezeigt werden.

**Zeitliche  
Darstellung**

**Spektrale  
Darstellung**

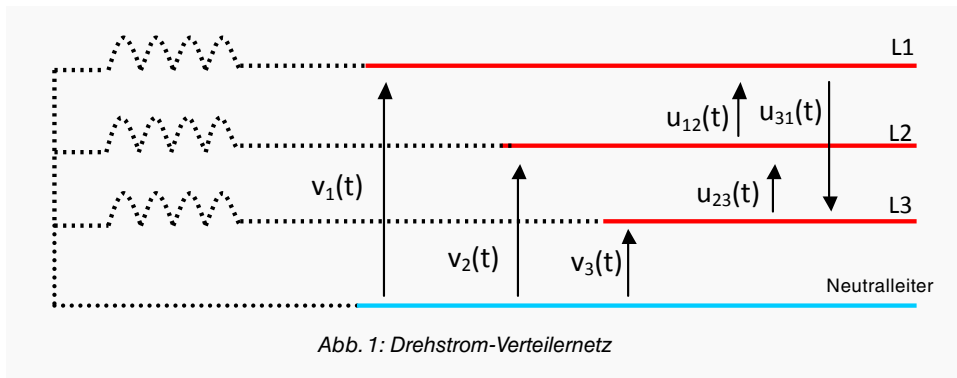
**Vektor-  
diagramm**

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## 1. Dreiphasen-Wechselspannungen

Die Übertragung elektrischer Energie vom Erzeuger (Kraftwerk) bis zum Verbraucher (Last) erfolgt über drei Außenleitern. Besonders Industriebetriebe beziehen ihren Strom als Dreiphasen-Wechselspannung oder Drehstrom. Ein Drehstromnetz besteht aus drei sinusförmigen Wechselspannungen gleicher Frequenz.

Ein Drehstrom-Verteilernetz (Abb. 1) besteht aus drei Außenleitern und manchmal einem zusätzlichen Neutraleiter. Dabei können die folgenden Spannungen gemessen werden:



### A. Mathematische Gleichungen und Eigenschaften

Im Dreiphasensystem sind die mit  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  und  $v_3(t)$  bezeichneten Spannungen zwischen Phase und Neutraleiter (die sog. Sternspannungen) durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

In der Theorie gilt:

- die Amplituden der 3 Spannungen sind gleich,
- die Phasenverschiebungen sind gleich (jeweils von  $120^\circ$ ),
- die drei Spannungen sind sinusförmig.

In der Praxis trifft dies nicht immer zu. Abweichungen von diesen Werten lassen sich durch Messungen der **Unsymmetrie** und der **harmonischen Verzerrung** (Oberschwingungen) feststellen.

Die Spannungen  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  und  $v_3(t)$  werden als "Phase-Neutraleiter-Spannung" oder als "Sternspannung" bezeichnet. Die Spannungen  $u_{12}(t)$ ,  $u_{23}(t)$  und  $u_{31}(t)$  zwischen den Phasen werden als "verkettete Spannung" oder "Außenleiterspannung" bezeichnet. Wenn ein Dreiphasensystem völlig in Ordnung ist, sind diese verketteten Spannungen durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \\u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Die Amplitude und damit der Effektivwert der verketteten Spannungen ist  $\sqrt{3}$  mal größer als die der Sternspannungen. Die Summe der drei Teilspannungen in einem völlig ausgeglichenen Dreiphasensystem ist stets 0.

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## B. Zeitliche Darstellung

Ein Dreiphasensystem besteht aus den drei sinusförmigen Sternspannungen (Abb. 2), die jeweils um 120° gegeneinander verschoben sind. Bei 50 Hz ergibt sich dadurch ein zeitlicher Versatz von 6,666... ms, wie aus folgenden Gleichungen ersichtlich:

$$\omega \cdot t_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_0 = \frac{2\pi}{3 \cdot \omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67 \text{ ms}$$

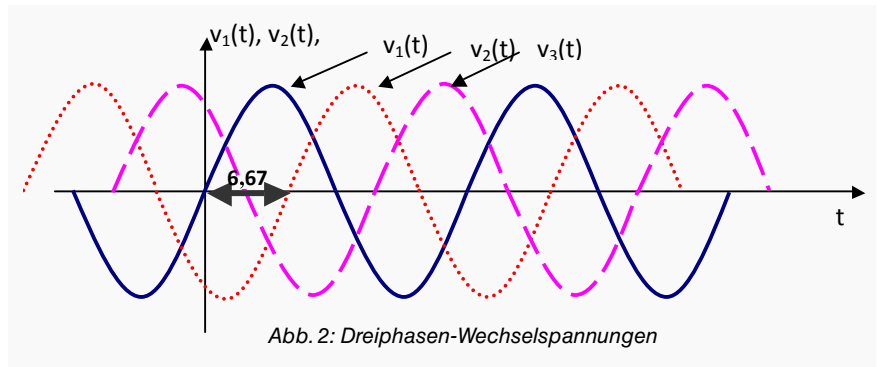


Abb. 2: Dreiphasen-Wechselspannungen

## C. Vektordiagramm

Das oben beschriebene Dreiphasensystem mit drei Sternspannungen lässt sich auch als Vektordiagramm darstellen (Abb. 3). Dabei zeigt die Länge der Vektoren die jeweilige Amplitude der Spannung an. Da in der Elektrotechnik aber eher die Effektivwerte der Spannung interessant sind, werden für die **Vektordiagramme** oftmals die Effektivwerte der sinusförmigen Spannungen eingesetzt.

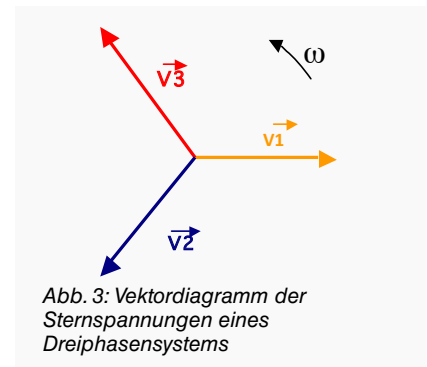


Abb. 3: Vektordiagramm der Sternspannungen eines Dreiphasensystems

## 2. Zeitliche Darstellung der Signale

Die Darstellung von elektrischen Signalen in Abhängigkeit von der Zeit erfolgt in einem **Oszillogramm**. Dabei sind die Veränderungen des analogen Signals (Spannung oder Strom) über der Zeit deutlich sichtbar. Die Änderung des Signals folgt dabei einem **mathematischen Gesetz**.

Ein mit der Zeit veränderliches Spannungs- oder Stromsignal (Abb. 4) lässt sich durch eine mathematische Funktion der folgenden Art beschreiben:

$$t \rightarrow x(t)$$

darin stellt  $x(t)$  den Wert des Signals zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  dar. Diesen Wert des Signals bezeichnet man als **Momentanwert**.

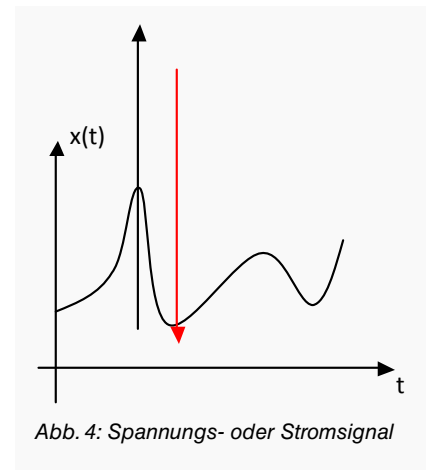


Abb. 4: Spannungs- oder Stromsignal

## Besondere Eigenschaften

### Periodisches signal

Ein Signal  $x(t)$  wird als **periodisch** bezeichnet, wenn folgende Beziehung gilt:

$$x(t + T) = x(t)$$

d.h. dass sich das Signal nach einer bestimmten Zeit exakt wiederholt. Die Zeit, nach der das Signal genau die gleichen Werte annimmt, bezeichnet man als **Periodendauer T** (Abb. 5).

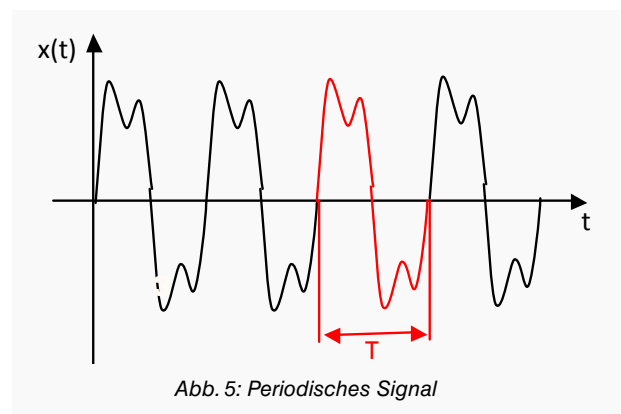


Abb. 5: Periodisches Signal

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## Fourier-Reihe

Wenn ein Signal periodisch, aber nicht sinusförmig ist, und bestimmte mathematische Eigenschaften erfüllt (die aber meistens bei den in der Elektrotechnik vorkommenden Signalen gegeben sind), kann man es nach einer sog. **Fourier-Reihe** entwickeln. Dadurch erhält man eine zeitliche Darstellung des Signals, die nur aus seiner Gleichstromkomponente und einer Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen besteht, die jeweils ein Vielfaches der Frequenz des Grundsignals aufweisen.

Diese Eigenschaft ist besonders interessant, da sie die Berechnung des Signals vereinfacht (Rechnung mit komplexen Zahlen) und eine **spektrale Darstellung** ermöglicht.

Eine Fourier-Transformation nimmt man wie folgt vor:

Gegeben sei  $x(t)$ , ein periodisches Signal mit der Periodendauer  $T$ .

Die Entwicklung von  $x(t)$  als Fourier-Reihe ist nun wie folgt möglich:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases}$$

mit:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

Dabei bezeichnet  $X_0$  den Gleichstromanteil im Signal  $x(t)$ ;

$A_n$  und  $B_n$  sind Koeffizienten, die die Amplituden der Oberschwingungen  $n$ -ter Ordnung des Signals  $x(t)$  darstellen.

## Beispiele

### Gleichspannung

$$u(t) = E$$

Die Spannung  $u(t)$  (Abb. 6) verändert sich nicht mit der Zeit.

Sie ist nicht periodisch und lässt sich daher auch nicht in einer Fourier-Reihe entwickeln.

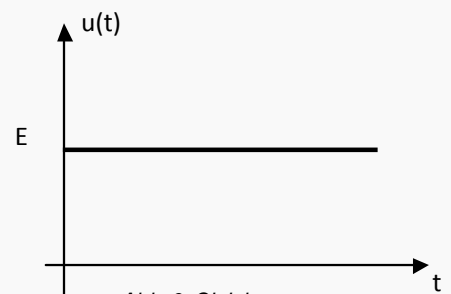


Abb. 6: Gleichspannung

### Sinusförmiger Wechselstrom (Abb. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

Dieses Signal ist periodisch mit der Periodendauer  $T$ , denn es gilt:

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

$i(t+T) = i(t)$  dieses Signal ist also periodisch mit der Periodendauer  $T$ .

Eine Fourier-Transformation ist hier nicht sinnvoll, denn  $i(t)$  ist vollkommen sinusförmig.

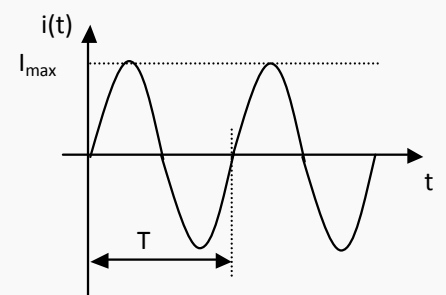


Abb. 7: Sinusförmiger Wechselstrom

### Rechteck-Stromsignal (Abb. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ während der ersten Halbperiode} \\ i(t) = -I \text{ während der zweiten Halbperiode} \end{cases}$$

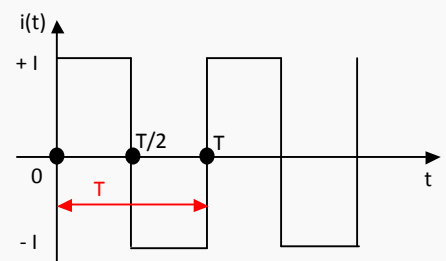


Abb. 8: Rechteck-Stromsignal

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## Mathematische Fourier-Transformation

Berechnung von  $I_0$

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} I dt + \int_{T/2}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{T/2} - t_{T/2}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[ \frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

Das Ergebnis war vorhersehbar, da das Signal  $i(t)$  symmetrisch zur Zeitachse ist.

Berechnung der  $A_n$

$$A_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} I \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt - \int_{T/2}^T I \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[ \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)_0^{T/2} - \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)_{T/2}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Berechnung der  $B_n$

$$B_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} I \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt - \int_{T/2}^T I \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[ -\cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)_0^{T/2} + \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)_{T/2}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [ -(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n ]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Für gerade  $n$  ist  $B_n$  gleich 0, für ungerade  $n$  ergibt sich  $B_n$  wie folgt:  $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

Die Fourier-Transformation des Signals  $i(t)$  lässt sich also wie folgt schreiben:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ ungerade})$$

### Wichtiger Hinweis:

Um die  $A_n$  und die  $B_n$  zu berechnen, kann es sinnvoll sein, den Nullpunkt der Zeitachsen so zu legen, dass sich Symmetrien in der mathematischen Beschreibung des Signals ergeben. Dadurch lassen sich die Berechnungen erheblich vereinfachen.

## Zeitliche Darstellung

Mit der oben ausgeführten Fourier-Transformation lässt sich das ursprüngliche Signal mehr oder weniger genau darstellen, je nach der Anzahl berücksichtigter Terme.

- Wenn man nur den ersten Term berücksichtigt (Abb. 9):

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$$

Diesen ersten Term bezeichnet man auch als Grundschwingung.

- Wenn man die ersten beiden Terme berücksichtigt:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$$

- Wenn man die ersten drei Terme berücksichtigt:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$$

Je mehr Terme der Fourier-Entwicklung man berücksichtigt, umso genauer lässt sich das ursprüngliche Signal wieder darstellen.

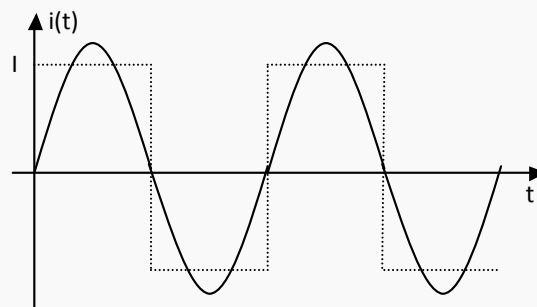


Abb. 9:  $i(t)$  durch seine Grundschwingung dargestellt

# 5 Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## 3. Darstellung der Signale als Vektordiagramm

In der Vektordiagramm-Darstellung erscheinen die Amplituden als Länge der Pfeile und deren Phasenlage als Winkel im Kreis. Wir können nun Vektor-Operationen verwenden, die vielfach einfacher zu handhaben sind als Berechnungen von Sinus- und Kosinusfunktionen. Die Vektordarstellung der Beziehungen zwischen Spannung und Strom ermöglicht es zum Beispiel, nur die Phasenverschiebung und die Amplitude des Signals zu berücksichtigen. Eine Berechnung, die sich auch mit komplexen Zahlen bewältigen lässt.

### A. Entsprechung zwischen Zeit- und Vektordiagramm

Eine Vektordarstellung ist nur bei sinusförmigen Signalen möglich. Ein Sinussignal  $x(t)$  ist durch die folgende Beziehung gegeben:

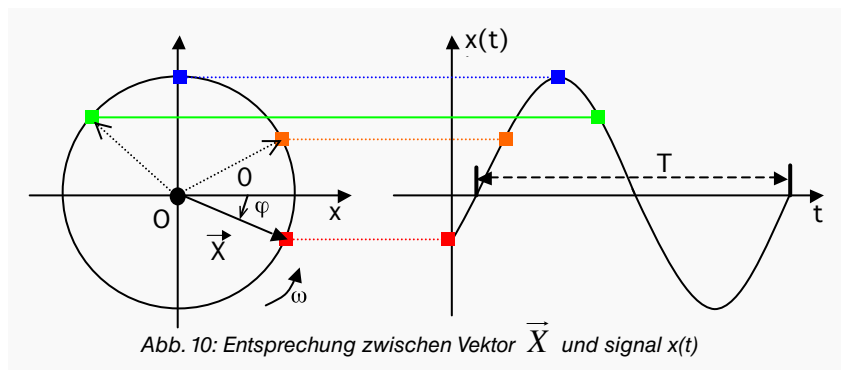
$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

$X$  die Amplitude des Sinussignals  $x(t)$   
 $\omega$  die Kreisfrequenz des Sinussignals  $x(t)$   
 $\varphi$  die Phasenlage bei Beginn des Signals  $x(t)$

Diese Darstellung beruht auf der Entsprechung zwischen einem Vektor mit der Länge (Amplitude)  $X$ , der sich mit der Kreisfrequenz  $\omega$  um einen Mittelpunkt  $O$  dreht, und der zeitlichen Darstellung desselben Signals entlang einer Zeitachse (Abb. 10).

$\varphi$  ist die Anfangs-Phasenlage für  $t = 0$ .  
 Der vom Vektor  $\vec{X}$  in Bezug auf die Nullachse  $Ox$  zurückgelegte Winkel ist  $(\omega t + \varphi)$ .  
 Die Periodendauer  $T$  ist wie folgt definiert:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



### B. Vektordiagramm

Wenn man sinusförmige Spannungs- und Stromsignale innerhalb derselben Schaltung untersuchen möchte, bieten sich Vektor- oder Zeigerdiagramme als bequeme Darstellungsart an. Die Signale haben dieselbe Frequenz bzw. Periode und unterscheiden sich nur durch die Amplitude und die Phasenlage. Eine Darstellung der Vektoren zu einem bestimmten Zeitpunkt erleichtert dann die Behandlung von Problemen (Abb. 11).

Man nimmt dabei üblicherweise den Zeit-Nullpunkt ( $t = 0$ ) an.

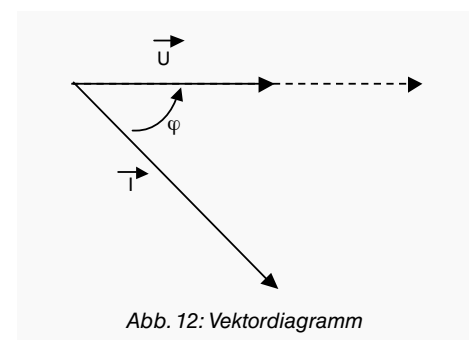
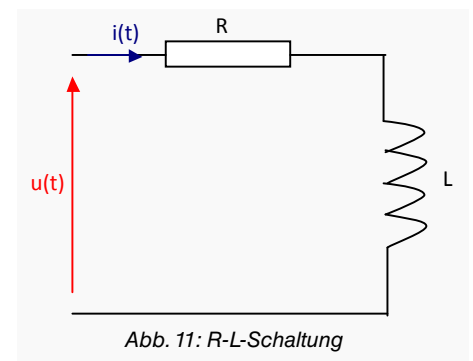
#### Beispiel 1: induktiver Schaltkreis

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$  im ständigen Betrieb errechnet sich der Strom  $i(t)$  wie folgt:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

In der Vektordarstellung (Abb. 12) erscheinen die Spannung und der Strom als die Vektoren  $\vec{U}$  und  $\vec{I}$ :

Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Winkel  $\varphi$  vereinbarungsgemäß immer vom Strom zur Spannung ausgerichtet ist.



# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## Beispiel 2: Dreiphasen-Spannungssystem

Ein Dreiphasen-Spannungssystem ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_{\max} \sin \omega.t \\ v_2(t) &= V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{2.\pi}{3}\right) \\ v_3(t) &= V_{\max} \sin\left(\omega.t - \frac{4.\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Abb. 13 ist ein Vektordiagramm dieses Dreiphasensystems.

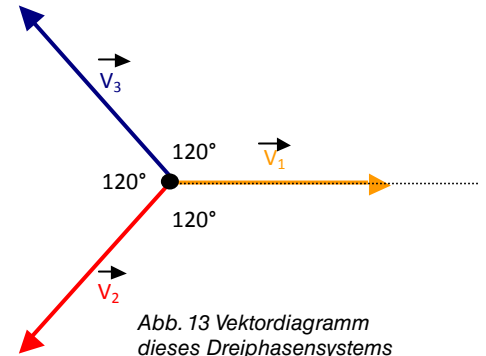


Abb. 13 Vektordiagramm dieses Dreiphasensystems

## 4. Spektrale Darstellung der Signale

Ein nicht-sinusförmiges Signal ist komplex aufgebaut, es kann eine Vielzahl von Frequenzen enthalten. Eine spektrale Darstellung gibt Auskunft darüber, aus welchen Frequenzanteilen sich das Signal zusammensetzt. Das Spektrum eines Signals bildet die Amplituden der Signalanteile auf der Y-Achse in Abhängigkeit von ihrer Frequenz auf der X-Achse ab.

Wenn ein Signal periodisch, aber nicht sinusförmig ist, und bestimmte mathematische Eigenschaften erfüllt (die aber meistens bei den in der Elektrotechnik vorkommenden Signalen gegeben sind) kann man es nach einer sog. Fourier-Reihe entwickeln. Dadurch erhält man eine zeitliche Darstellung des Signals, die nur aus seiner Gleichstromkomponente und einer Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen besteht, die jeweils ein Vielfaches der Frequenz des Grundsignals aufweisen.

Eine Fourier-Reihenentwicklung ist besonders interessant, da sie eine Darstellung des Signals ermöglicht, die aufzeigt, aus welchen Komponenten sich das Signal mit ihrer jeweiligen Amplitude und Frequenz zusammensetzt.

Im Falle eines rein sinusförmigen Signals (Abb. 14) gilt folgende Gleichung:

$$x(t) = X \sin \omega.t$$

Die Amplitude  $X$  des Signals ergibt sich aus der Sinusfunktion mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oder der Frequenz  $f$ .

Diese beiden wesentlichen Eigenschaften eines Wechselstromnetzes lassen sich graphisch darstellen, indem man auf der Y-Achse die Amplitude der betreffenden Sinusschwingung und auf der X-Achse ihre Frequenz einträgt. So erhält man die spektrale Darstellung des Signals  $x(t)$  (Abb. 15).

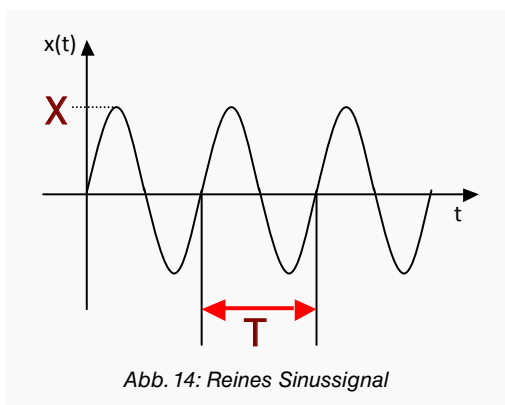


Abb. 14: Reines Sinussignal

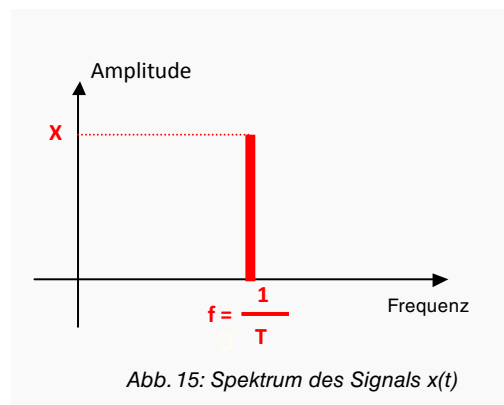


Abb. 15: Spektrum des Signals  $x(t)$

# Vielseitige Darstellungen von Drehstromsignalen

## Beispiel: Rechtecksignal

Ein Strom  $i(t)$  sei durch die folgende mathematische Gleichung beschrieben:

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ w\u00e4hrend der ersten Halbperiode} \\ i(t) = -I \text{ w\u00e4hrend der zweiten Halbperiode} \end{cases}$$

Die Abb. 16 zeigt den zeitlichen Verlauf des Signals  $i(t)$ .

Die Fourier-Reihenentwicklung des Signals  $i(t)$  sieht wie folgt aus:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ ungerade})$$

Dieses Signal hat keinen Gleichstromanteil, es setzt sich wie folgt zusammen:

- aus einem Sinussignal der Frequenz  $f$  (der Grundfrequenz) mit der Amplitude  $\frac{4 \cdot I}{\pi}$
- aus einem Sinussignal der Frequenz  $3f$  mit der Amplitude  $\frac{4 \cdot I}{3 \cdot \pi}$
- aus einem Sinussignal der Frequenz  $5f$  mit der Amplitude  $\frac{4 \cdot I}{5 \cdot \pi}$
- etc.

Mit dieser Fourier-Transformation k\u00f6nnen wir das Signal wie folgt spektral darstellen, d.h. mit seinen Oberschwingungen (Abb. 17):

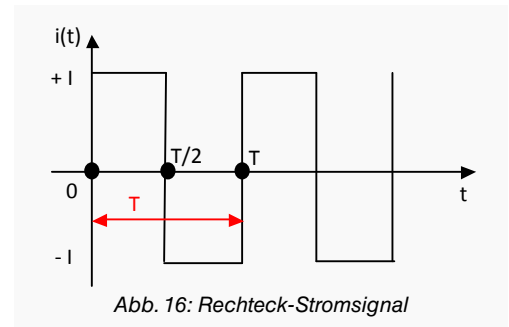


Abb. 16: Rechteck-Stromsignal

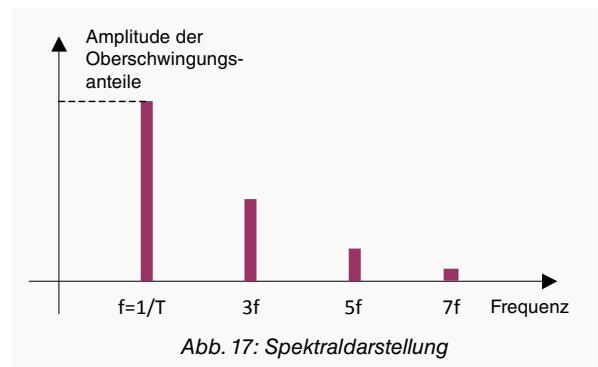
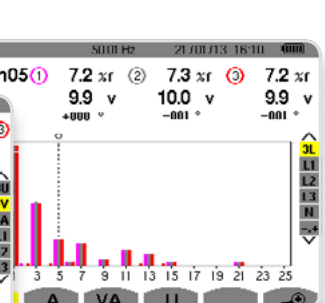
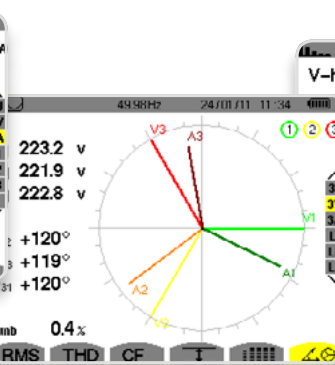
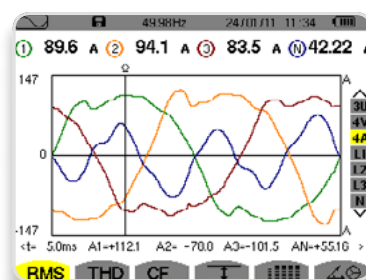


Abb. 17: Spektraldarstellung



Mit den Leistungs- und Energie-Analysatoren der **Serie Qualistar+** lassen sich Signale in allen drei Arten darstellen.

**DEUTSCHLAND**  
**Chauvin Arnoux GmbH**  
 Ohmstra\u00dfe 1  
 77694 KEHL / RHEIN  
 Tel.: +49 7851 99 26-0  
 Fax: +49 7851 99 26-60  
 info@chauvin-arnoux.de  
 www.chauvin-arnoux.de

**\u00d6STERREICH**  
**Chauvin Arnoux Ges.m.b.H**  
 Slamastrasse 29/2/4  
 1230 WIEN  
 Tel.: +43 1 61 61 9 61  
 Fax: +43 1 61 61 9 61-61  
 vie-office@chauvin-arnoux.at  
 www.chauvin-arnoux.at

**SCHWEIZ**  
**Chauvin Arnoux AG**  
 Moosacherstrasse 15  
 8804 AU / ZH  
 Tel.: +41 44 727 75 55  
 Fax: +41 44 727 75 56  
 info@chauvin-arnoux.ch  
 www.chauvin-arnoux.ch

